Ciągłość funkcji

Seminarium dyplomowe — powtórzenie wiadomości

Jan Kowalski

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

22 maja 2013

Definicja ciągłości funkcji w punkcie

Definicja

- Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Mówimy, że f jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Definicja ciągłości funkcji w punkcie

Definicja

- Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Mówimy, że f jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

- Mówimy, że funkcja f jest **lewostronnie ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D,\, x<x_0}\ |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Definicja ciągłości funkcji w punkcie

Definicja

- Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Mówimy, że f jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

- Mówimy, że funkcja f jest **lewostronnie ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D,\, x<x_0}\ |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

- Mówimy, że funkcja f jest **prawostronnie ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D,\, x>x_0}\ |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Funkcja ciągła

Warunek konieczny i dostateczny ciągłości

Funkcja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewo- i prawostronnie.

Funkcja ciągła

Warunek konieczny i dostateczny ciągłości

Funkcja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewo- i prawostronnie.

Definicja

Funkcja jest ciągła na zbiorze, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Funkcja ciągła

Warunek konieczny i dostateczny ciągłości

Funkcja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewo- i prawostronnie.

Definicja

Funkcja jest ciągła na zbiorze, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Przykład

Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe na swoich dziedzinach.

Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to

Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to

- *funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie x_0,*

Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to

- *funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie x_0,*
- *funkcja $f - g$ jest ciągła w punkcie x_0,*

Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to

- *funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie x_0,*
- *funkcja $f - g$ jest ciągła w punkcie x_0,*
- *funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0,*

Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to

- *funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie x_0,*
- *funkcja $f - g$ jest ciągła w punkcie x_0,*
- *funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0,*
- *funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0, o ile $g(x_0) \neq 0$.*

Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to

- *funkcja $f+g$ jest ciągła w punkcie x_0,*
- *funkcja $f-g$ jest ciągła w punkcie x_0,*
- *funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0,*
- *funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0, o ile $g(x_0) \neq 0$.*

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, a funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenia Weierstrassa

Karl Friedrich Weierstrass (1815–1897) — matematyk niemiecki

Twierdzenia Weierstrassa

Karl Friedrich Weierstrass (1815–1897) — matematyk niemiecki

Twierdzenie (Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej)

Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym, to jest na nim ograniczona.

Twierdzenia Weierstrassa

Karl Friedrich Weierstrass (1815–1897) — matematyk niemiecki

Twierdzenie (Weierstrassa o osiąganiu kresów)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym, to osiąga swoje kresy, tzn.

$$\exists_{c\in[a,b]} \quad f(c) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \wedge \quad \exists_{d\in[a,b]} \quad f(d) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

Twierdzenia Darboux

Jean Gaston Darboux (1842–1917) — matematyk francuski

Twierdzenia Darboux

Jean Gaston Darboux (1842–1917) — matematyk francuski

Twierdzenie (Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to

$$\forall_{y \in (f(a), f(b))} \exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = y.$$

Twierdzenia Darboux

Jean Gaston Darboux (1842–1917) — matematyk francuski

Twierdzenie (Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to

$$\forall_{y \in (f(a), f(b))} \exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = y.$$

Gdyby w powyższym twierdzeniu założyć dodatkowo, że f jest rosnąca, to punkt c byłby wyznaczony jednoznacznie.

Twierdzenia Darboux

Jean Gaston Darboux (1842–1917) — matematyk francuski

Twierdzenie (Darboux o miejscach zerowych funkcji)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.