# Ciągłość funkcji

## Seminarium dyplomowe — powtórzenie wiadomości

Jan Kowalski

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

22 maja 2013

# Definicja ciągłości funkcji w punkcie

## Definicja

- Niech $f$ będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Mówimy, że $f$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

# Definicja ciągłości funkcji w punkcie

## Definicja

- Niech $f$ będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Mówimy, że $f$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{\delta>0} \, \forall_{x \in D} \, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Mówimy, że funkcja $f$ jest **lewostronnie ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{\delta>0} \, \forall_{x \in D,\, x<x_0} \, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

# Definicja ciągłości funkcji w punkcie

## Definicja

- Niech $f$ będzie funkcją określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Mówimy, że $f$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Mówimy, że funkcja $f$ jest **lewostronnie ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D,\, x<x_0}\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Mówimy, że funkcja $f$ jest **prawostronnie ciągła w punkcie** $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D,\, x>x_0}\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

# Funkcja ciągła

**Warunek konieczny i dostateczny ciągłości**

Funkcja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewo- i prawostronnie.

# Funkcja ciągła

## Warunek konieczny i dostateczny ciągłości

Funkcja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewo- i prawostronnie.

## Definicja

Funkcja jest **ciągła na zbiorze**, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

# Funkcja ciągła

## Warunek konieczny i dostateczny ciągłości

Funkcja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewo- i prawostronnie.

## Definicja

Funkcja jest **ciągła na zbiorze**, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

## Przykład

Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe na swoich dziedzinach.

# Działania na funkcjach ciągłych

**Twierdzenie**

*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są ciągłe w punkcie $x_0$, to*

# Działania na funkcjach ciągłych

**Twierdzenie**

*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są ciągłe w punkcie $x_0$, to*

- *funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*

# Działania na funkcjach ciągłych

**Twierdzenie**

*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są ciągłe w punkcie $x_0$, to*

- *funkcja $f+g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*
- *funkcja $f-g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*

# Działania na funkcjach ciągłych

**Twierdzenie**

*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są ciągłe w punkcie $x_0$, to*

- *funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*
- *funkcja $f - g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*
- *funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*

# Działania na funkcjach ciągłych

**Twierdzenie**

*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są ciągłe w punkcie $x_0$, to*

- *funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*
- *funkcja $f - g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*
- *funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*
- *funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie $x_0$, o ile $g(x_0) \neq 0$.*

# Działania na funkcjach ciągłych

**Twierdzenie**

*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są ciągłe w punkcie $x_0$, to*

- *funkcja $f+g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*
- *funkcja $f-g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*
- *funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie $x_0$,*
- *funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie $x_0$, o ile $g(x_0) \neq 0$.*

**Twierdzenie**

*Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $x_0$, a funkcja $g$ jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie $x_0$.*

# Twierdzenia Weierstrassa

Karl Friedrich Weierstrass (1815–1897) — matematyk niemiecki

# Twierdzenia Weierstrassa

Karl Friedrich Weierstrass (1815–1897) — matematyk niemiecki

**Twierdzenie (Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej)**

*Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym, to jest na nim ograniczona.*

# Twierdzenia Weierstrassa

Karl Friedrich Weierstrass (1815–1897) — matematyk niemiecki

**Twierdzenie (Weierstrassa o osiąganiu kresów)**

*Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła na przedziale domkniętym, to osiąga swoje kresy, tzn.*

$$\exists_{c\in[a,b]} \quad f(c)=\inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \wedge \quad \exists_{d\in[a,b]} \quad f(d)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

# Twierdzenia Darboux

Jean Gaston Darboux (1842–1917) — matematyk francuski

# Twierdzenia Darboux

Jean Gaston Darboux (1842–1917) — matematyk francuski

**Twierdzenie (Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich)**

*Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to*

$$\forall_{y \in (f(a), f(b))} \exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = y.$$

# Twierdzenia Darboux

Jean Gaston Darboux (1842–1917) — matematyk francuski

**Twierdzenie (Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich)**

*Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to*

$$\forall_{y \in (f(a), f(b))} \exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = y.$$

Gdyby w powyższym twierdzeniu założyć dodatkowo, że $f$ jest rosnąca, to punkt $c$ byłby wyznaczony jednoznacznie.

# Twierdzenia Darboux

Jean Gaston Darboux (1842–1917) — matematyk francuski

**Twierdzenie (Darboux o miejscach zerowych funkcji)**

*Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a)f(b) < 0$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.*