Przykładowe zadania maturalne

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność $x^3-x^2 \leqslant x^2-x$ i zaznacz jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

Rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie nierówność $x^3 - x^2 \leqslant x^2 - x$:

$$x^3 - x^2 - x^2 + x \leqslant 0,$$
$$x^3 - 2x^2 + x \leqslant 0,$$
$$x \cdot \left(x^2 - 2x + 1\right) \leqslant 0.$$

Wyrażenie w nawiasie zapisujemy jako kwadrat różnicy dwóch liczb:

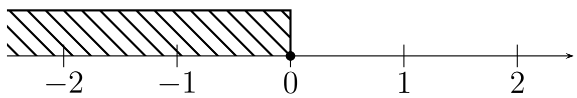
$$x \cdot (x-1)^2 \leqslant 0.$$

Ponieważ $(x-1)^2 \geqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to nierówność

$$x \cdot (x-1)^2 \leqslant 0$$

zachodzi dla $x \leqslant 0$.

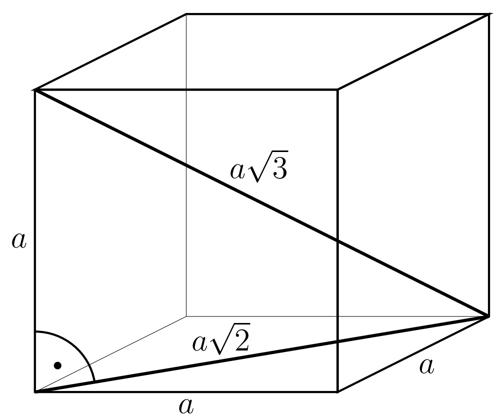
Zaznaczamy zbiór rozwiązań nierówności $x^3-x^2 \leqslant x^2-x$ na osi liczbowej.



Zadanie 2. Oblicz objętość sześcianu o przekątnej długości $2\sqrt{3}$.

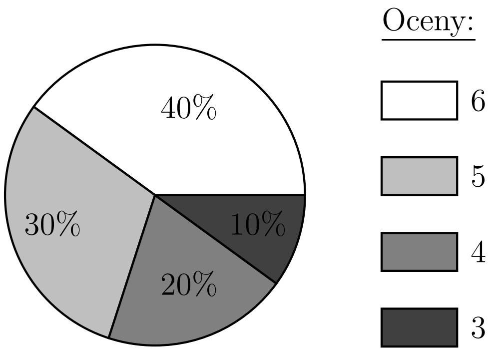
Rozwiązanie

Oznaczmy przez a długość krawędzi tego sześcianu (zob. rys.).



Wówczas przekątna podstawy, która jest kwadratem o boku a, ma długość $a\sqrt{2}$, a przekątna sześcianu, która jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i $a\sqrt{2}$, ma długość $a\sqrt{3}$. Wobec tego mamy równość $a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, skąd $a = 2$. Z wzoru na objętość sześcianu o krawędzi a ($V = a^3$) otrzymujemy, że $V = 2^3 = 8$.

Zadanie 3. Oblicz średnią ocen końcowych z matematyki w pewnej klasie, korzystając z danych przedstawionych na poniższym wykresie.



Rozwiązanie

Częstości (w %) występowania tych ocen w całym zestawie, przedstawione na diagramie, odpowiadają wagom, z jakimi oceny te występują. Dlatego poszukiwana średnia tych ocen wynosi:

$$\frac{40}{100} \cdot 6 + \frac{30}{100} \cdot 5 + \frac{20}{100} \cdot 4 + \frac{10}{100} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

Na podstawie:

Henryk Pawłowski: *Obowiązkowa matura z matematyki.* Toruń, Oficyna Wydawnicza „Tutor”, 2010, str. 29, 97, 116.