Niezależne zmienne losowe

Definicja niezależności zmiennych losowych jest naturalna: zdarzenia generowane przez poszczególne zmienne losowe powinny być niezależne.

Definicja 1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o wartościach w $\mathbb{R}$, określone na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy *niezależnymi*, gdy dla każdego ciągu zbiorów borelowskich $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zachodzi równość

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in B_n). \tag{1}$$

Z (1) widać, że rozkład łączny niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest wyznaczony przez rozkłady brzegowe, a dokładniej — przez rozkłady zmiennych losowych X_i.

Definicję 1. można także wypowiedzieć krótko: zmienne losowe są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy niezależne są σ-ciała generowane przez te zmienne losowe. Istotnie, po prawej stronie równości (1) występują zdarzenia postaci $X_i^{-1}(B_i)$, gdzie $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, czyli wszystkie elementy σ-ciał $\sigma(X_i)$.

Dowodzenie czegokolwiek dla dowolnego ciągu zbiorów borelowskich może przestraszyć początkującego. Ale sprawdzenie niezależności da się znacznie uprościć, a głównym narzędziem w dowodach odpowiednich twierdzeń będzie lemat o π- i λ-układach. Oto pierwsze twierdzenie z tej serii.

Twierdzenie 2. *Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o wartościach w $\mathbb{R}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$*

$$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = F_{X_1}(t_1) \cdot F_{X_2}(t_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(t_n). \tag{2}$$

Dowód. ($\Rightarrow$) W warunku (1) podstawiamy $B_i = (-\infty, t_i]$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.
($\Leftarrow$) Niech $\tilde{F}$ będzie dystrybuantą rozkładu $\mu_{X_1} \otimes \ldots \otimes \mu_{X_n}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t_1, \ldots, t_n) &= \mu_{X_1} \otimes \mu_{X_2} \otimes \ldots \otimes \mu_{X_n}((-\infty, t_1] \times \ldots \times (-\infty, t_n]) = \\ &= \mu_{X_1}((-\infty, t_1]) \cdot \ldots \cdot \mu_{X_n}((-\infty, t_n]) = \\ &= F_{X_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(t_n),\end{aligned}$$

co z założenia jest równe $F_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n)$. Zatem

$$\mu_{X_1} \otimes \mu_{X_2} \otimes \ldots \otimes \mu_{X_n} = \mu_{(X_1,\ldots,X_n)},$$

bo oba rozkłady mają identyczną dystrybuantę. W szczególności dla dowolnych $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy

$$\begin{aligned}P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n) &= \mu_{(X_1,\ldots,X_n)}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \\ &= \mu_{X_1}(B_1) \otimes \ldots \otimes \mu_{X_n}(B_n) = \\ &= P(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in B_n).\end{aligned}$$

□

Przykład 1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Znaleźć rozkłady $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$ i $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

Wyznaczymy dystrybuanty:

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) = P(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x) = \\
&= P(X_1 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x) = F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \ldots \cdot F_n(x), \\
F_Z(x) &= P(Z \leqslant x) = 1 - P(Z > x) = \\
&= 1 - P(X_1 > x) \cdot \ldots \cdot P(X_n > x) = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(x)].
\end{aligned}$$

W przypadku szczególnym, gdy X_i mają rozkłady jednostajne na $[0, 1]$, mamy

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x^n & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1, \end{cases}$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1 - (1 - x)^n & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

□

Gdy zmienne losowe mają taki sam typ rozkładu, to można podać prostsze charakteryzacje niezależności.

Zaczniemy od rozkładów dyskretnych. Niech S_{X_i} będzie zbiorem punktów skokowych rozkładu μ_{X_i}.

Twierdzenie 3. *Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o rozkładach dyskretnych są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $x_1, \ldots, x_n$, gdzie $x_i \in S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,*

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n).$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Wprost z definicji niezależności, wystarczy wziąć $B_i = \{x_i\}$.

($\Leftarrow$) Sprawdzamy, że jest spełniony warunek (2) z twierdzenia 2.

$$\begin{aligned}
F_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n) &= \sum_{y_i \leqslant t_i, y_i \in S_{X_i}} P(X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n) = \\
&= \sum_{y_i \leqslant t_i, y_i \in S_{X_i}} P(X_1 = y_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = y_n) = \\
&= \Big(\sum_{y_1 \leqslant t_1, y_1 \in S_{X_1}} P(X_1 = y_1) \Big) \cdot \ldots \times \\
&\quad \times \Big(\sum_{y_n \leqslant t_n, y_n \in S_{X_n}} P(X_n = y_n) \Big) = \\
&= F_{X_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(t_n).
\end{aligned}$$

Operacje na nieskończonych sumach są uprawnione ze względu na dodatniość składników. $\square$

Źródło:

Jacek Jakubowski, Rafał Sztencel: *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa. Wydanie IV,* Warszawa, Script, 2010, str. 99–101.